

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1) Να βρείτε την κλίση των ευθειών στις πιο κάτω περιπτώσεις:

$$(\alpha) (\varepsilon_1): 4\psi - 5 = 0$$

$$(\gamma) (\varepsilon_3): 5\chi - 3 = 0$$

$$(\beta) (\varepsilon_2): 2\chi - 7\psi + 2 = 0$$

$$(\delta) (\varepsilon_4): \psi = -6\chi + 5$$

2) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) περνά από το σημείο $\Gamma(-1,3)$ και έχει κλίση $\lambda = -2$

(β) έχει κλίση $\lambda = \infty$ και περνά από το σημείο $B(5,-7)$

(γ) περνά από το σημείο $A(3,1)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\chi = 5$

(δ) περνά από τα σημεία $A(2, -5)$ και $B(-2,1)$

(ε) περνά από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία
 $6\psi + 3\chi - 2 = 0$

(στ) περνά από το σημείο τομής των ευθειών $\psi = 3\chi + 5$ και $\chi + \psi = 1$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\psi = 2\chi + 1$

3) Να βρείτε τις τιμές του μ , ώστε οι ευθείες:

$(\varepsilon_1): \mu\chi - (\mu - 12)\psi + 5 = 0$ και $(\varepsilon_2): \chi + (3\mu - 1)\psi + 7 = 0$ να είναι παράλληλες.

4) Σε τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ η πλευρά $ΑΒ$ έχει εξίσωση $3\chi + 4\psi + 6 = 0$ και οι συντεταγμένες της κορυφής Γ είναι $(2,2)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς $ΒΓ$

β) τις συντεταγμένες του σημείου B

5) Να λύσετε τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x - y = 4 \\ 2(x - 5) = 3(y - 1) + 2 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x = 4 - 2y \\ 3x = 5 + y \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \frac{3y}{2} - \frac{x+3}{6} = 1 \\ 2x + 5(x-y) = 53 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} 2x + y = -10 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} 2(3a-5) - 4(a+\beta) = -22 \\ \frac{2\beta-a}{3} - \frac{3a-10}{4} = \frac{a+\beta}{2} \end{cases}$$

6) Το άθροισμα των ηλικιών της Μαρίας και της Ελένης είναι 24. Πριν δύο χρόνια η ηλικία της Ελένης ήταν τριπλάσια από την ηλικία της Μαρίας. Ποιές είναι οι ηλικίες τους σήμερα;

7) Σε ένα θέατρο παρευρέθηκαν 26 άτομα, παιδιά και ενήλικες. Τα εισιτήρια κόστιζαν €19 για τους ενήλικες και €9 για τα παιδιά. Αν σύνολο εισέπραξαν €384, πόσα παιδιά και πόσοι ενήλικες παρακολούθησαν το θέατρο;

8) α) Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε οι ευθείες $(\epsilon_1): (\alpha+1)\chi - 8\psi = 10$ και $(\epsilon_2): 3\chi + 2\beta\psi = 5$ να συμπίπτουν.

β) Για ποια τιμή του λ οι ευθείες $(\epsilon_1): (\lambda-2)\chi - 3\psi = 2$ και $(\epsilon_2): \chi - 2\psi = 5$ είναι παράλληλες.

γ) Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε το σύστημα $\left. \begin{matrix} (\alpha+1)\chi - (\beta-2)\psi = 5 \\ 2\chi - 5\psi = 1 \end{matrix} \right\}$ να

είναι αδύνατο.

Αόριστο $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ και $b_1 = b_2$

Αδύνατο $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ και $b_1 \neq b_2$

Μία λύση $\Leftrightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$

9) Ποιο από τα πιο κάτω συστήματα είναι αδύνατο, ποιο είναι αόριστο και ποιο έχει μόνο μία λύση; (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

α) $3x - 4\psi = 2$
 $15x - 20\psi = 10$

$$-4\psi = -3x + 2$$

$$\psi = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$-20\psi = -15x + 10 \Rightarrow$$

$$\psi = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{3}{4}, b_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = \frac{3}{4}, b_2 = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 \\ b_1 = b_2 \end{array} \right\}$$

Αόριστο σύστημα

β) $3x + 2\psi = 8 \Rightarrow \psi = -\frac{3}{2}x + 4$
 $6x + 4\psi = 20 \Rightarrow \psi = -\frac{3}{2}x + 5$

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2}, b_1 = 4$$

$$\lambda_2 = -\frac{3}{2}, b_2 = 5$$

\Downarrow

$$\lambda_1 = \lambda_2 \text{ και } b_1 \neq b_2$$

Αδύνατο σύστημα

γ) $3x - \psi = 6 \Rightarrow \psi = 3x - 6$
 $12x + 4\psi = 24 \Rightarrow$
 $4\psi = -12x + 24 \Rightarrow$
 $\psi = -3x + 6$

$$\lambda_1 = 3, b_1 = -6$$

$$\lambda_2 = -3, b_2 = 6$$

\Downarrow

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Μόνο μία λύση

δ) $9x + 3\psi = 8 \Rightarrow 3\psi = -9x + 8 \Rightarrow$
 $-18x - 6\psi = 4 \quad \psi = -3x + \frac{8}{3}$

\Downarrow

$$-6\psi = 18x - 4 \Rightarrow$$

$$\psi = -3x + \frac{2}{3}$$

$$\lambda_1 = -3, b_1 = \frac{8}{3}$$

$$\lambda_2 = -3, b_2 = +\frac{2}{3}$$

\Downarrow

$$\lambda_1 = \lambda_2 \text{ και } b_1 \neq b_2$$

Αδύνατο σύστημα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

① α) $4\psi - 5 = 0 \Rightarrow \psi = \frac{5}{4}$ $\lambda = 0$

β) $2x - 7\psi + 2 = 0 \Rightarrow$
 $-7\psi = -2x - 2 \Rightarrow \psi = \frac{2}{7}x + \frac{2}{7}$ $\lambda = \frac{2}{7}$

γ) $5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$ $\lambda = \infty$ (δεν ορίζεται)

δ) $\psi = -6x + 5$ $\lambda = -6$

② α) $y = \lambda x + b$

$y = -2x + b$

Γ(-1,3): $3 = -2 \cdot (-1) + b \Rightarrow 3 = 2 + b \Rightarrow b = 1$

Άρα: $y = -2x + 1$

β) $\lambda = \infty$, B(5,-7), Άρα: $x = 5$

γ) A(3,1) \perp $x = 5$ σημαίνει είναι η $y = 1$

δ) A(2,-5), B(-2,1)

$$\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 + 5}{-2 - 2} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + b$$

B(-2,1): $1 = -\frac{3}{2} \cdot (-2) + b \Rightarrow 1 = 3 + b \Rightarrow \underline{\underline{b = -2}}$

Άρα: $y = -\frac{3}{2}x - 2$

$$\textcircled{2} \quad \epsilon) \quad (0,0) \perp 6\psi + 3x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$6\psi = -3x + 2 \Rightarrow$$

$$\psi = -\frac{3x}{6} + \frac{2}{6} \Rightarrow \psi = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow \lambda_2 = 2$$

$$\text{Άρα: } y = \lambda x + b \Rightarrow y = 2x + b$$

$$(0,0): 0 = 2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$$

$$\text{Άρα: } \boxed{y = 2x}$$

$$\sigma) \quad \psi = 3x + 5$$

$$x + \psi = 1$$

$$x + 3x + 5 = 1 \Rightarrow$$

$$4x = -4 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$\text{και } \psi = 3 \cdot (-1) + 5 \Rightarrow \boxed{\psi = 2}$$

$$\parallel \psi = 2x + 1$$

$$\lambda_1 = 2$$

↓

$$\lambda_2 = 2$$

$$y = \lambda x + b$$

$$y = 2x + b$$

$$(-1, 2): 2 = 2 \cdot (-1) + b \Rightarrow 2 = -2 + b \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$\text{Άρα: } \boxed{y = 2x + 4}$$

$$\textcircled{3} \quad \mu x - (\mu - 12)\psi + 5 = 0 \Rightarrow -(\mu - 12)\psi = -\mu x - 5 \Rightarrow$$

$$\psi = \frac{-\mu x}{-(\mu - 12)} + \frac{5}{-(\mu - 12)} \Rightarrow$$

$$\psi = \frac{\mu}{\mu - 12} + \frac{5}{\mu - 12} \quad (\mu \neq 12)$$

$$x + (3\mu - 1)\psi + 7 = 0 \Rightarrow (3\mu - 1)\psi = -x - 7 \Rightarrow \psi = \frac{-1}{3\mu - 1}x - \frac{7}{3\mu - 1}$$

ΠΡΕΠΕΙ $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \frac{\mu}{\mu - 12} = \frac{-1}{3\mu - 1} \Rightarrow 3\mu^2 - \mu = -\mu + 12 \Rightarrow 3\mu^2 = 12 \Rightarrow$

$$\mu^2 = 4 \Rightarrow \boxed{\mu = 2} \text{ ή } \boxed{\mu = -2}$$

Συνέχεια ③ ΠΡΕΠΕΙ $b_1 \neq b_2$

$$\frac{5}{\mu-12} \neq \frac{-7}{3\mu-1} \Rightarrow$$

$$15\mu-5 \neq -7\mu+84 \Rightarrow$$

$$15\mu+7\mu \neq 84+5 \Rightarrow$$

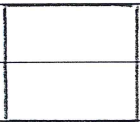
$$22\mu \neq 89 \Rightarrow \boxed{\mu \neq \frac{89}{22}}$$

④

A

B

$$AB: 3x+4y+6=0 \Rightarrow$$



$$4y = -3x-6 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{6}{4}$$

Δ

$\Gamma(2,2)$

$$\lambda_{AB} = -\frac{3}{4}$$

$$AB \perp B\Gamma \Rightarrow \lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1$$

$$\lambda_{AB} = -\frac{3}{4}$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{4}{3}$$

a) Εξίσωση BΓ:

$$y = \lambda x + b \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + b$$

$$\Gamma(2,2): 2 = \frac{4}{3} \cdot 2 + b \Rightarrow 2 = \frac{8}{3} + b \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

$$B\Gamma: y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

b) Β είναι το σημείο τομής της AB και BΓ:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$3x+4y+6=0 \Rightarrow 3x+4\left(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)+6=0 \Rightarrow 3x+\frac{16}{3}x-\frac{8}{3}+6=0:$$

$$3x+\frac{16}{3}x = \frac{8}{3}-6 \Rightarrow$$

$$9x+16x = 8-18 \Rightarrow 25x = -10 \Rightarrow x = -\frac{10}{25} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{2}{5}}$$

$$y = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{2}{3} = -\frac{8}{15} - \frac{2}{3} = -\frac{8}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{18}{15} = \boxed{-\frac{6}{5}}$$

Άρα: $B\left(-\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ „

$$\begin{array}{l|l|l}
 \textcircled{5} \text{ a) } x+3y=6 & 1 & x+3y=6 \\
 2x-y=5 & 3 & 6x-3y=15 \\
 \hline
 7x=21 \Rightarrow & & \\
 \boxed{x=3} & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x+3y=6 \\
 3+3y=6 \Rightarrow \\
 3y=3 \Rightarrow \boxed{y=1}
 \end{array}$$

Lösung: (3,1)

$$\text{b) } x-y=4 \Rightarrow x=y+4$$

$$2(x-5) = 3(y-1) + 2$$

$$2(y+4-5) = 3y-3+2 \Rightarrow$$

$$2(y-1) = 3y-1 \Rightarrow 2y-2 = 3y-1 \Rightarrow$$

$$2y-3y = 2-1 \Rightarrow -y = 1 \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

$$x = y+4$$

$$x = -1+4 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Lösung: (3,-1)

$$\text{c) } x = 4-2y$$

$$3x = 5+y \Rightarrow 3(4-2y) = 5+y \Rightarrow$$

$$12-6y = 5+y \Rightarrow$$

$$7y = 7 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$x = 4-2y$$

$$x = 4-2 \cdot 1 = 4-2 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Lösung: (2,1)

$$\textcircled{5} \delta) \frac{\overset{3}{3y}}{2} - \frac{\overset{1}{x+3}}{\overset{6}{6}} = 1 \Rightarrow 9y - x - 3 = 6 \Rightarrow -x + 9y = 9$$

$$2x + 5(x - y) = 53 \Rightarrow$$

$$2x + 5x - 5y = 53 \Rightarrow$$

$$7x - 5y = 53$$

$$\begin{array}{r|l} -x + 9y = 9 & \cdot 7 \\ \hline -7x + 63y = 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 7x - 5y = 53 & \cdot 1 \\ \hline 7x - 5y = 53 \end{array}$$

$$58y = 116 \Rightarrow$$

$$y = \frac{116}{58} = \boxed{2}$$

$$-x + 9y = 9 \Rightarrow -x = 9 - 9y \Rightarrow x = 9y - 9$$

$$x = 9 \cdot 2 - 9 = 18 - 9 = \boxed{9}$$

Λύση: (9, 2)

$$\textcircled{5} \epsilon) \begin{array}{r|l} 2x + y = -10 & \cdot (-1) \\ \hline -2x - y = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x + 3y = 5 & \cdot 2 \\ \hline 2x + 6y = 10 \end{array}$$

$$5y = 20 \Rightarrow \boxed{y = 4}$$

$$x + 3y = 5$$

$$x + 3 \cdot 4 = 5 \Rightarrow x = 5 - 12 \Rightarrow \boxed{x = -7}$$

Λύση: (-7, 4)

$$\textcircled{5} \sigma) 6a - 10 - 4a - 4b = -22 \Rightarrow 2a - 4b = -12$$

$$\frac{\overset{4}{2b-a}}{3} - \frac{\overset{3}{3a-10}}{4} = \frac{\overset{6}{a+b}}{2} \Rightarrow 8b - 4a - 9a + 30 = 6a + 6b \Rightarrow$$

$$2b - 19a = -30$$

$$\begin{array}{r|l} 2a - 4b = -12 & \cdot 1 \\ \hline 2a - 4b = -12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -9a + 2b = -30 & \cdot 2 \\ \hline -38a + 4b = -60 \end{array}$$

$$-36a = -72 \Rightarrow a = \frac{-72}{-36} = \boxed{2}$$

$$2a - 4b = -12 \Rightarrow 2 \cdot 2 - 4b = -12 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Λύση: (a, b) = (2, 4)

⑥ $x = \text{ηλίμια Μαρίας}$
 $y = \text{— 11 — Εγγενης}$

$$x + y = 24$$

$$y - 2 = 3(x - 2) \Rightarrow y - 2 = 3x - 6 \Rightarrow 3x - y = 4$$

$$\begin{array}{r} x + y = 24 \\ 3x - y = 4 \\ \hline 4x = 28 \end{array}$$

$$\boxed{x = 7}$$

 Μαρία

$$x + y = 24$$

$$\boxed{y = 17}$$

 Εγγενη

⑦ $\text{Παιδιά} = x$
 $\text{Ενήλικες} = y$

$$\begin{array}{r} x + y = 26 \\ 19y + 9x = 384 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} x + y = 26 \\ 9x + 19y = 384 \end{array} \begin{array}{c} -9 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} -9x - 9y = -234 \\ 9x + 19y = 384 \end{array} \right.$$

$$10y = 150$$

$$\boxed{y = 15} \text{ ενήλικη}$$

$$x + y = 26 \Rightarrow \boxed{x = 11}$$

 Παιδιά

$$\textcircled{8} \text{ a) } (\varepsilon_1): (a+1)x - 8\psi = 10 \Rightarrow \psi = \frac{a+1}{-8}x + \frac{10}{-8} \Rightarrow$$

$$3x + 2b\psi = 5$$

$$\Downarrow \quad \psi = + \frac{a+1}{8}x - \frac{5}{4}$$

$$\psi = - \frac{3}{2b}x + \frac{5}{2b}$$

πρέπει $\boxed{b \neq 0}$

Οι ευθείες συμπίπτουν εάν $\lambda_1 = \lambda_2$ και $b_1 = b_2$

$$\frac{a+1}{8} = - \frac{3}{2b} \quad - \frac{5}{4} = \frac{5}{2b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ab + 2b = -24$$

$$2a \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) = -24$$

$$\Rightarrow -4a - 4 = -24 \Rightarrow$$

$$-4a = -20 \Rightarrow \boxed{a = +5}$$

$$2b = -4 \Rightarrow$$

$$\boxed{b = -2}$$

$$\textcircled{8} \text{ b) } (\varepsilon_1): (\lambda-2)x - 3\psi = 2 \Rightarrow \psi = \frac{\lambda-2}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$(\varepsilon_2): x - 2\psi = 5 \Rightarrow \psi = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ και $b_1 \neq b_2$

$$\frac{\lambda-2}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{3} \neq -\frac{5}{2} \text{ (ok)}$$

$$2\lambda - 4 = 3 \Rightarrow$$

$$2\lambda = 7 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{7}{2}}$$

β) γ) Αόριστο σύστημα $\Leftrightarrow a_1 = a_2$ και $b_1 = b_2$

$$(a+1)x - (b-2)\psi = 5 \Rightarrow \psi = + \frac{a+1}{b-2}x - \frac{5}{b-2}$$

$$2x - 5\psi = 1 \Rightarrow \psi = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$$

$$a_1 = a_2$$

και

$$b_1 = b_2$$

$$\frac{a+1}{b-2} = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{5}{b-2} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$5(a+1) = 2 \cdot 25 \Rightarrow$$

$$b-2 = 25 \Rightarrow \boxed{b=27}$$

$$5a+5 = 50 \Rightarrow$$

$$5a = 45 \Rightarrow$$

$$\boxed{a=9}$$