ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΓΕΡΙΟΥ
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018-2019 – Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟ

Όνομα: ____________________ **Τμήμα**: Γ1 **Αριθμός**: ________

Μάθημα: Μαθηματικά - Γ΄ Γυμνασίου **Περίοδος**: 1η **Ημερομηνία**: 16.4.2019

Είδος Διαγωνίσματος: Μάθημα Ενότητας – Στερεομετρία **(Κοινό)** **Διάρκεια**: 40΄

Καθηγητές: Φάκα Άννα / Πανάου Γιώργος / Πηλαβάκης Μιχάλης **Βαθμός**: ____________

Υπογραφή Κηδεμόνα: ____________ **Υπογραφή Καθηγητή/τριας**: ____________

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε: **(β. 12)**

(α) Τον όγκο κώνου του οποίου η ακτίνα της βάσης του είναι 10m και το ύψος του 9m.

(β) Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κυλίνδρου του οποίου η ακτίνα της βάσης του είναι 3m και το ύψος του 10m. (Οι απαντήσεις σας να δοθούν συναρτήσει του π)

(α) $V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{3}} \Rightarrow \boxed{V = 300\pi\ m^3}$

(β) $E_{o\lambda} = E_\pi + 2E_\beta = 2\pi R \upsilon + 2\pi R^2$

$= 2\pi \cdot 3 \cdot 10 + 2\pi \cdot 3^2 = 60\pi + 18\pi \Rightarrow$

$\boxed{E_{o\lambda} = 78\pi\ m^2}$

2. Ορθού τριγωνικού πρίσματος η βάση είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 5m και 6m. Να βρείτε το ύψος του πρίσματος αν ο όγκος του ισούται με $120m^3$. **(β. 12)**

$V = 120m^3$

$E_\beta = \frac{\kappa\alpha\theta._1 \cdot \kappa\alpha\theta._2}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15\,m^2$

$V = E_\beta \cdot \upsilon$

$120 = 15\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{120}{15} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 8m}$

3. Ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίνεται η διαγώνιος του 13 cm , το ύψος του 12 cm και το πλάτος του 3 cm. Να βρείτε: **(β. 14)**

(α) Το μήκος του και

(β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του.

(α) $\delta = 13\,cm,\ \gamma = 12\,cm,\ b = 3\,cm$

$\delta = \sqrt{a^2+b^2+\gamma^2} \Rightarrow 13 = \sqrt{a^2+3^2+12^2} \Rightarrow$

$13^2 = a^2+9+144 \Rightarrow a^2 = 169-144-9 \Rightarrow a^2 = 16 \xRightarrow{(a>0)} \boxed{a = 4\,cm}$

(β) $E_{o\lambda} = 2\cdot(ab+a\gamma+b\gamma)$

$E_{o\lambda} = 2\cdot(4\cdot3+4\cdot12+3\cdot12) = 2\cdot(12+48+36)$

$= 2\cdot96 \Rightarrow \boxed{E_{o\lambda} = 192\,cm^2}$

4. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα το παράπλευρο ύψος της ισούται με 15cm και η πλευρά της βάσης της ισούται με 18cm. Να βρείτε: $h = 15\,cm,\ a = 18\,cm$

α) Το ύψος της πυραμίδας.

β) Τον όγκο της πυραμίδας. **(β. 14)**

(α) Π.Θ. $h^2 = \upsilon^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow 15^2 = \upsilon^2 + 9^2 \Rightarrow$

$\upsilon^2 = 225-81 = 144 \xRightarrow{(\upsilon>0)} \boxed{\upsilon = 12\,cm}$

(β) $V = \frac{E_b\cdot\upsilon}{3} = \frac{324\cdot\cancel{12}^{4}}{\cancel{3}} \Rightarrow \boxed{V = 1296\,cm^3}$

$E_b = a^2 = 18^2 = 324\,cm^2$

5. Μια άδεια πισίνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει μήκος 12m και πλάτος 5m. Για να γεμίσει πλήρως η πισίνα με νερό αδειάζουμε σε αυτή 15 ντεπόζιτα γεμάτα νερό, που έχουν σχήμα κύβου ακμής 2m. Να υπολογίσετε το βάθος της πισίνας. **(β. 14)**

$a_π = 12m$, $β = 5m$

Κύβος: $a_κ = 2m$, $V_κ = a_κ^3 = 2^3 = 8m^3$

$V_π = 15 \cdot 8 = 120\ m^3$

$V_π = a_π \cdot β \cdot γ$

$120 = 12 \cdot 5 \cdot γ \Rightarrow 120 = 60γ \Rightarrow \boxed{γ = 2m}$

(Βάθος της πισίνας)

6. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας το εμβαδόν της παράπλευρής επιφάνειας της είναι $400m^2$ και το απόστημα της είναι διπλάσιο από την πλευρά της βάσης της. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας. **(β. 14)**

$E_π = 400m^2$, $h = 2a$

$E_π = \frac{Π_β \cdot h}{2} \Rightarrow 400 = \frac{4a \cdot \cancel{2}a}{\cancel{2}} \Rightarrow 400 = 4a^2 \Rightarrow a^2 = 100 \xRightarrow{(a>0)} \boxed{a = 10m}$

$\Rightarrow \boxed{h = 20m}$

$E_β = a^2 = 10^2 = 100m^2$

$E_{ολ} = E_π + E_β$

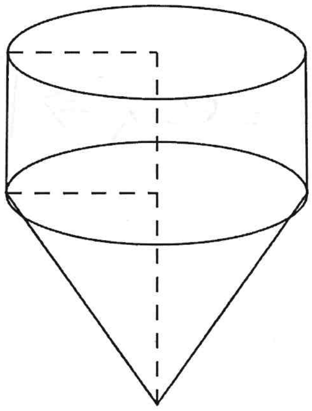
$E_{ολ} = 400 + 100 \Rightarrow \boxed{E_{ολ} = 500m^2}$

7. Μια εταιρεία θα κατασκευάσει με λαμαρίνα ένα σιλό για αποθήκευση σιτηρών όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για την κατασκευή θα χρησιμοποιηθούν ένας κώνος και ένας κύλινδρος με ανοικτές και ίσες βάσεις. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι ίσο με $60\pi m^2$ και η γενέτειρα του είναι ίση με 10m. Το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με 5 m. **(β. 20)**

Να υπολογίσετε:

(α) Τον όγκο του σιλό.

(β) Πόσα λίτρα μπογιάς θα χρειαστούμε για να βάψουμε την εξωτερική επιφάνεια της κατασκευής, αν με κάθε λίτρο μπογιάς μπορούμε να βάψουμε $9,42m^2$ (Δίνεται π=3,14 και να θεωρηθεί ότι το πάχος της λαμαρίνας είναι αμελητέο).



Κώνος:

$E_K = 60\pi m^2$

$\lambda = 10m$

$E_K = \pi R \lambda$

$60\cancel{\pi} = \cancel{\pi} \cdot R \cdot 10 \Rightarrow R = 6m$

Π.Θ.: $\lambda^2 = R^2 + \upsilon^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + \upsilon^2 \Rightarrow$

$\upsilon^2 = 100 - 36 \xRightarrow{(\upsilon>0)} \boxed{\upsilon = 8m}$

$V_{\kappa\omega\nu.} = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = \frac{\pi \cdot \cancel{36}^{12} \cdot 8}{\cancel{3}} = 96\pi m^3$

Κύλινδρος:

$\upsilon = 5m$

$R = 6m$

$V_{\kappa\upsilon\lambda.} = \pi R^2 \upsilon = \pi \cdot 6^2 \cdot 5$

$V_{\kappa\upsilon\lambda.} = 180\pi m^3$

(α) $V_{o\lambda} = V_{\kappa\omega\nu.} + V_{\kappa\upsilon\lambda.} = 96\pi + 180\pi \Rightarrow \boxed{V_{o\lambda} = 276\pi m^3}$

(β) Θα βάψουμε την κυρτή κώνου και κυρτή κυλίνδρου

$E_{\kappa.\kappa\omega\nu.} = 60\pi = 60 \cdot 3,14 = 188,4 m^2$

$E_{\kappa.\kappa\upsilon\lambda.} = 2\pi R \upsilon = 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 5 = 188,4 m^2$

$E_{o\lambda} = E_{\kappa.\kappa\omega\nu.} + E_{\kappa.\kappa\upsilon\lambda}$

$E_{o\lambda} = 188,4 + 188,4$

$\boxed{E_{o\lambda} = 376,8 m^2}$

$\frac{376,8}{9,42} = \boxed{40}$ λίτρα μπογιάς

Άσκηση Bonus: **(Με πλήρη επίλυση)** **(β. 5)**

Ορθό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3 διαδοχικούς αριθμούς. Αν το ύψος του πρίσματος ισούται με το άθροισμα των δύο κάθετων πλευρών του τριγώνου, να βρεθεί ο όγκος και η ολική επιφάνεια του.

Πλευρές τριγώνου: x, $x+1$, $x+2$

Π.Θ.: $(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2$

$\cancel{x^2}+4x+4 = \cancel{x^2}+2x+1+x^2 \Rightarrow$

$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow$

$\boxed{x=3}$ ή $x=-1$

Δεκτό Απορ.

Άρα: 3 μον., 4 μον., 5 μον.

$υ = 3+4 \Rightarrow υ = 7$ μον.

$E_β = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$ τ.μ.

$Π_β = 3+4+5 = 12$ μ.

$V = E_β \cdot υ = 6\cdot 7 \Rightarrow \boxed{V = 42 \text{ κ.μ.}}$

$E_{ολ} = E_π + 2E_β$

$E_π = Π_β \cdot υ = 12\cdot 7 = 84$ τ.μ.

$E_{ολ} = 84+2\cdot 6 \Rightarrow$

$E_{ολ} = 84+12 \Rightarrow \boxed{E_{ολ} = 96 \text{ τ.μ.}}$

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΓΕΡΙΟΥ
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018-2019 – Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟ

Όνομα: ______________________ **Τμήμα**: Γ1 **Αριθμός**: ______

Μάθημα: Μαθηματικά - Γ΄ Γυμνασίου **Περίοδος**: 1η **Ημερομηνία**: 16.4.2019

Είδος Διαγωνίσματος: Μάθημα Ενότητας – Στερεομετρία **(Κοινό)** **Διάρκεια**: 40΄

Καθηγητές: Φάκα Άννα / Πανάου Γιώργος / Πηλαβάκης Μιχάλης **Βαθμός**: ______________

Υπογραφή Κηδεμόνα: ______________ **Υπογραφή Καθηγητή/τριας**: ______________

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε: **(β. 12)**

(α) Τον όγκο κώνου του οποίου η ακτίνα της βάσης του είναι 10m και το ύψος του 9m.

(β) Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κυλίνδρου του οποίου η ακτίνα της βάσης του είναι 3m και το ύψος του 10m. (Οι απαντήσεις σας να δοθούν συναρτήσει του π)

(α) $V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{3}} \Rightarrow \boxed{V = 300\pi \ m^3}$

(β) $E_{o\lambda} = E_\pi + 2E_\beta = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2$

$= 2\pi \cdot 3 \cdot 10 + 2\pi \cdot 3^2 = 60\pi + 18\pi \Rightarrow$

$\boxed{E_{o\lambda} = 78\pi \ m^2}$

2. Ορθού τριγωνικού πρίσματος η βάση είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 5m και 6m. Να βρείτε το ύψος του πρίσματος αν ο όγκος του ισούται με $120m^3$. **(β. 12)**

$V = 120m^3$ $\quad E_\beta = \frac{K\alpha\theta._1 \cdot K\alpha\theta._2}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15\,m^2$

$V = E_\beta \cdot \upsilon$

$120 = 15\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{120}{15} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 8m}$

3. Ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίνεται η διαγώνιος του 13 cm , το ύψος του 12 cm και το πλάτος του 3 cm. Να βρείτε: **(β. 14)**

(α) Το μήκος του και

(β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του.

(α) $\delta = 13cm,\ \gamma = 12cm,\ b = 3cm$

$\delta = \sqrt{a^2+b^2+\gamma^2} \Rightarrow 13 = \sqrt{a^2+3^2+12^2} \Rightarrow$

$13^2 = a^2+9+144 \Rightarrow a^2 = 169-144-9 \Rightarrow a^2 = 16 \xRightarrow{(a>0)} \boxed{a = 4cm}$

(β) $E_{o\lambda} = 2\cdot(ab+a\gamma+b\gamma)$

$E_{o\lambda} = 2\cdot(4\cdot3+4\cdot12+3\cdot12) = 2\cdot(12+48+36)$

$= 2\cdot96 \Rightarrow \boxed{E_{o\lambda} = 192cm^2}$

4. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα το παράπλευρο ύψος της ισούται με 15cm και η πλευρά της βάσης της ισούται με 18cm. Να βρείτε: $h = 15cm,\ a = 18cm$

α) Το ύψος της πυραμίδας.

β) Τον όγκο της πυραμίδας. **(β. 14)**

(α) Π.Θ. $\boxed{h^2 = \upsilon^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \Rightarrow 15^2 = \upsilon^2+9^2 \Rightarrow$

$\upsilon^2 = 225-81 = 144 \xRightarrow{(\upsilon>0)} \boxed{\upsilon = 12cm}$

(β) $V = \frac{E_B\cdot\upsilon}{3} = \frac{324\cdot\cancel{12}^{4}}{\cancel{3}} \Rightarrow \boxed{V = 1296cm^3}$

$E_B = a^2 = 18^2 = 324cm^2$

5. Μια άδεια πισίνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει μήκος 12m και πλάτος 5m. Για να γεμίσει πλήρως η πισίνα με νερό αδειάζουμε σε αυτή 15 ντεπόζιτα γεμάτα νερό, που έχουν σχήμα κύβου ακμής 2m. Να υπολογίσετε το βάθος της πισίνας. **(β. 14)**

$a_{\pi} = 12m,\ b = 5m$

Κύβος: $a_{\kappa} = 2m,\ V_{\kappa} = a_{\kappa}^3 = 2^3 = 8m^3$

$V_{\pi} = 15 \cdot 8 = 120\ m^3$

$V_{\pi} = a_{\pi} \cdot b \cdot \gamma$

$120 = 12 \cdot 5 \cdot \gamma \Rightarrow 120 = 60\gamma \Rightarrow \boxed{\gamma = 2m}$

(Βάθος της πισίνας)

6. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας το εμβαδόν της παράπλευρής επιφάνειας της είναι $400m^2$ και το απόστημα της είναι διπλάσιο από την πλευρά της βάσης της. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας. **(β. 14)**

$E_{\pi} = 400m^2,\ h = 2a$

$E_{\pi} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} \Rightarrow 400 = \frac{4a \cdot \cancel{2}a}{\cancel{2}} \Rightarrow 400 = 4a^2 \Rightarrow a^2 = 100 \xRightarrow{(a>0)} \boxed{a = 10m}$

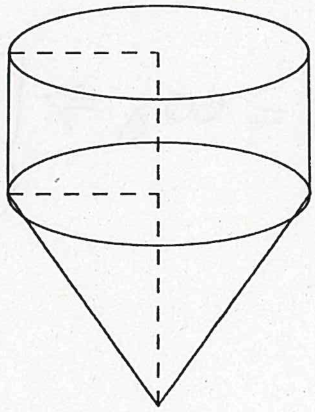
$\Rightarrow \boxed{h = 20m}$

$E_{\beta} = a^2 = 10^2 = 100m^2$

$E_{o\lambda} = E_{\pi} + E_{\beta}$

$E_{o\lambda} = 400 + 100 \Rightarrow \boxed{E_{o\lambda} = 500m^2}$

7. Μια εταιρεία θα κατασκευάσει με λαμαρίνα ένα σιλό για αποθήκευση σιτηρών όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για την κατασκευή θα χρησιμοποιηθούν ένας κώνος και ένας κύλινδρος με ανοικτές και ίσες βάσεις. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι ίσο με $60\pi m^2$ και η γενέτειρα του είναι ίση με 10m. Το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με 5 m. **(β. 20)**
Να υπολογίσετε:
(α) Τον όγκο του σιλό.
(β) Πόσα λίτρα μπογιάς θα χρειαστούμε για να βάψουμε την εξωτερική επιφάνεια της κατασκευής, αν με κάθε λίτρο μπογιάς μπορούμε να βάψουμε $9,42 m^2$ (Δίνεται π=3,14 και να θεωρηθεί ότι το πάχος της λαμαρίνας είναι αμελητέο).



Κώνος:

$E_\kappa = 60\pi m^2$

$\lambda = 10m$

$E_\kappa = \pi R \lambda$

$60\cancel{\pi} = \cancel{\pi} \cdot R \cdot 10 \Rightarrow R = 6m$

Π.Θ.: $\lambda^2 = R^2 + \upsilon^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + \upsilon^2 \Rightarrow$

$\upsilon^2 = 100 - 36 \xrightarrow{(\upsilon>0)} \boxed{\upsilon = 8m}$

$V_{\kappa\omega\nu.} = \dfrac{\pi R^2 \upsilon}{3} = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = \dfrac{\pi \cdot \cancel{36}^{12} \cdot 8}{\cancel{3}} = 96\pi m^3$

Κύλινδρος:

$\upsilon = 5m$

$R = 6m$

$V_{\kappa\upsilon\lambda.} = \pi R^2 \upsilon = \pi \cdot 6^2 \cdot 5$

$V_{\kappa\upsilon\lambda.} = 180\pi m^3$

(α) $V_{o\lambda} = V_{\kappa\omega\nu.} + V_{\kappa\upsilon\lambda.} = 96\pi + 180\pi \Rightarrow \boxed{V_{o\lambda} = 276\pi m^3}$

(β) Θα βάψουμε την κυρτή κώνου και κυρτή κυλίνδρου

$E_{\kappa.\kappa\omega\nu.} = 60\pi = 60 \cdot 3,14 = 188,4 m^2$

$E_{\kappa.\kappa\upsilon\lambda.} = 2\pi R \upsilon = 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 5 = 188,4 m^2$

$E_{o\lambda} = E_{\kappa.\kappa\omega\nu.} + E_{\kappa.\kappa\upsilon\lambda}$

$E_{o\lambda} = 188,4 + 188,4$

$\boxed{E_{o\lambda} = 376,8 m^2}$

$\dfrac{376,8}{9,42} = \boxed{40}$ λίτρα μπογιάς

<u>Άσκηση Bonus:</u> (Με πλήρη επίλυση) **(β. 5)**

Ορθό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3 διαδοχικούς αριθμούς. Αν το ύψος του πρίσματος ισούται με το άθροισμα των δύο κάθετων πλευρών του τριγώνου, να βρεθεί ο όγκος και η ολική επιφάνεια του.

Πλευρές τριγώνου : x, $x+1$, $x+2$

Π.Θ. : $(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2$

$\cancel{x^2} + 4x + 4 = \cancel{x^2} + 2x + 1 + x^2 \Rightarrow$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)\cdot(x+1) = 0 \Rightarrow$

$\boxed{x=3}$ ή $x=-1$

Δεκτό Απορ.

Άρα : 3 μον. , 4 μον., 5 μον.

$υ = 3+4 \Rightarrow υ = 7$ μον.

$E_β = \frac{3\cdot4}{2} = 6$ τ.μ.

$Π_β = 3+4+5 = 12$ μ.

$V = E_β \cdot υ = 6\cdot7 \Rightarrow \boxed{V = 42 \text{ κ.μ.}}$

$E_π = Π_β \cdot υ = 12\cdot7 = 84$ τ.μ.

$E_{ολ} = E_π + 2E_β$

$E_{ολ} = 84 + 2\cdot6 \Rightarrow$

$E_{ολ} = 84 + 12 \Rightarrow \boxed{E_{ολ} = 96 \text{ τ.μ.}}$