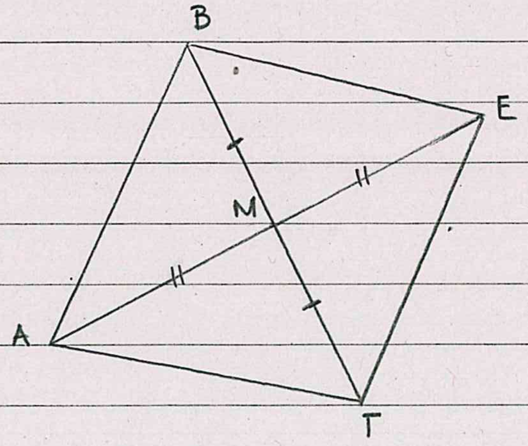
<u>Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ</u>

ΕΝΟΤΗΤΑ 9_ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΙΙ (Παραλληλόγραμμο)

Λυμένες Ασκήσεις 4-11 Δραστηριοτήτων σελ. 144-145

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.



Αφού ΑΜ διάμεσος ΒΓ $\Rightarrow$ ΒΜ = ΜΓ
ΜΕ = ΑΜ (δεδομένο)

Στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ οι διαγώνιοι διχοτομούνται επομένως ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

5. Δίνονται τα σημεία $K(4,3)$, $\Lambda(9,0)$, $M(8,\ -5)$ και $N(3,\ -2)$. Να δείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και ακολούθως να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου του.

Θα χρησιμοποιήσω τον τύπο της απόστασης 2 σημείων:

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

$$K\Lambda = \sqrt{(9-4)^2+(0-3)^2} = \sqrt{5^2+(-3)^2} = \sqrt{34} \text{ μον.}$$

$$\Lambda M = \sqrt{(8-9)^2+(-5-0)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \text{ μον.}$$

$$MN = \sqrt{(3-8)^2+(-2+5)^2} = \sqrt{(-5)^2+3^2} = \sqrt{34} \text{ μον.}$$

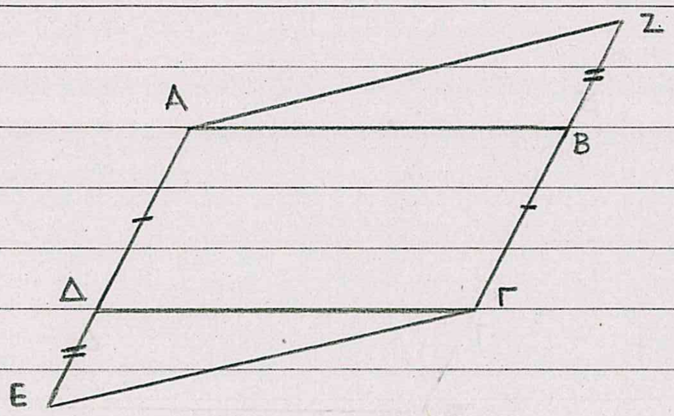
$$NK = \sqrt{(4-3)^2+(3+2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \text{ μον.}$$

Επομένως: $\left.\begin{array}{l} K\Lambda = MN \\ \Lambda M = NK \end{array}\right\}$ Απέναντι πλευρές ίσες $\Rightarrow$ ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού ΚΛΜΝ παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοι του διχοτομούνται
$\Rightarrow$ το κέντρο του Ο είναι το μέσο του ΚΜ ή ΛΝ

$$\left.\begin{array}{l} x_O = \dfrac{4+8}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 \\[2ex] \psi_O = \dfrac{3-5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{κέντρο } O(6,-1)$$

6. Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Να προεκτείνετε τις πλευρές ΑΔ, ΒΓ κατά τμήματα $ΔΕ = \frac{ΑΔ}{3}$ και $ΒΖ = \frac{ΒΓ}{3}$ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι ΑΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

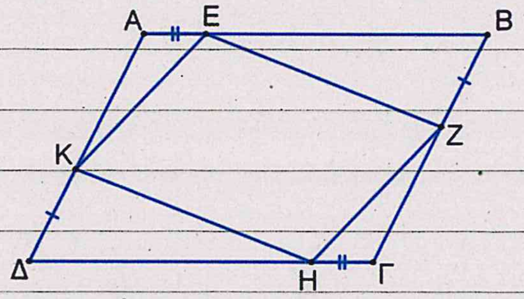


$$\left.\begin{array}{l} \text{Αφού } ΑΒΓΔ \ \# \Rightarrow ΑΔ \parallel ΒΓ \text{ και } ΑΔ = ΒΓ \\ ΔΕ = \dfrac{ΑΔ}{3} = \dfrac{ΒΓ}{3} = ΒΖ \end{array}\right\} \begin{array}{l} ΑΔ + ΔΕ = ΒΓ + ΒΖ \Rightarrow \\ ΑΕ = ΓΖ \end{array}$$

Επομένως:
$$\left.\begin{array}{l} ΑΕ = ΓΖ \\ ΑΕ \parallel ΓΖ \text{ (ως προεκτάσεις παράλληλων πλευρών)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

το ΑΖΓΕ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, άρα ΑΖΓΕ παραλληλόγραμμο.

7. Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και ΑΕ=ΓΗ και ΒΖ=ΔΚ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο.



Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AEK}$ και $\overset{\Delta}{H\Gamma Z}$:

1) ΗΓ = ΑΕ (δεδομένο) (Π)
2) $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (απέναντι γωνίες #) (Γ)
3) ΑΚ = ΓΖ (διαφορά ίσων πλευρών ΑΚ = ΑΔ − ΚΔ, ΓΖ = ΒΓ − ΒΖ, ΑΔ = ΒΓ και ΚΔ = ΒΖ) (Π)

(Π)-(Γ)-(Π) ⇓ $\overset{\Delta}{AEK} = \overset{\Delta}{H\Gamma Z}$ ⇓

⇒ έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ⇒ ΚΕ = ΗΖ

Ομοίως συγκρίνοντας τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{K\Delta H}$ και $\overset{\Delta}{EBZ}$ με αντίστοιχα κριτήρια (Π-Γ-Π) παίρνουμε ότι ΚΗ = ΕΖ

$\left.\begin{array}{l} KE = HZ \\ KH = EZ \end{array}\right\}$ Απέναντι πλευρές ίσες ⇒ ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο.

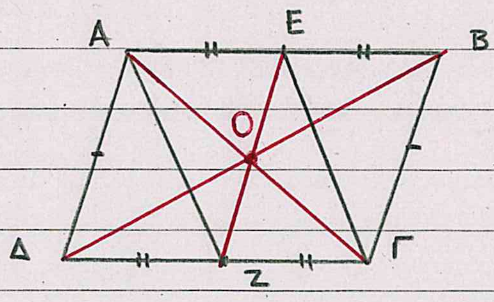
8. Να βρείτε τις συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής αν οι τρεις κορυφές ενός παραλληλογράμμου είναι (−1, 2), (2, 2) και (0, −4).

$A(-1,2)$, $B(2,2)$, $\Gamma(0,-4)$, $\Delta(x,y)$

Η διαγώνιος ΑΓ έχει μέσο $M\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ το οποίο είναι το ίδιο σημείο με το μέσο της διαγωνίου ΒΔ (σημείο τομής διαγωνίων που διχοτομούνται)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\cancel{2}} &= \frac{2+x}{\cancel{2}} \Rightarrow x = -3 \\ -1 &= \frac{2+y}{2} \Rightarrow -2 = 2+y \Rightarrow y = -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta(-3,-4)$$

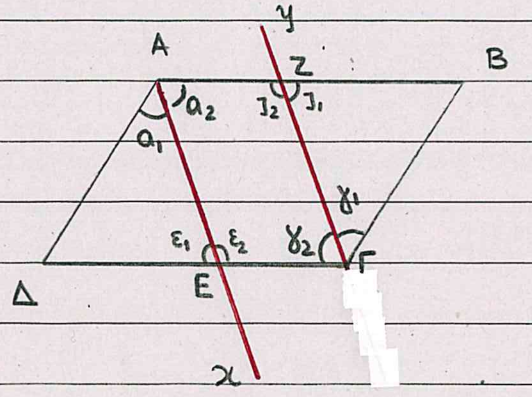
9. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
(α) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο
(β) οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΖ συντρέχουν (περνούν από το ίδιο σημείο).



(α) ΑΒ = ΓΔ (αφού ΑΒΓΔ #)
Ε μέσο του ΑΒ ⇒ ΑΕ = ΕΒ
Ζ μέσο του ΓΔ ⇒ ΔΖ = ΖΓ
⇒ ΑΕ = ΖΓ
Αφού ΑΒΓΔ # ⇒ ΑΒ // ΓΔ ⇒ ΑΕ // ΖΓ
Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες ⇒ ΑΕΓΖ #.

(β) ΑΒΓΔ #, επομένως οι διαγώνιοι ΒΔ και ΑΓ συντρέχουν (σημείο τομής των διαγωνίων), έστω στο Ο.
ΑΕΓΖ #, επομένως οι διαγώνιοι ΑΓ και ΖΕ συντρέχουν (σημείο τομής των διαγωνίων) και αφού η ΑΓ είναι διαγώνιος και του ΑΒΓΔ και του ΑΕΓΖ, το Ο είναι σημείο τομής και των διαγωνίων ΑΓ και ΕΖ του ΑΕΓΖ.
Επομένως οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ περνούν όλες από το Ο, επομένως συντρέχουν.

10. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών παραλληλογράμμου είναι παράλληλες.



Αx διχοτόμος της $\Delta\hat{A}B \Rightarrow \hat{a}_1 = \hat{a}_2$

Γy διχοτόμος της $\Delta\hat{\Gamma}B \Rightarrow \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2$

Αφού ΑΒΓΔ # $\Rightarrow \hat{A} = \hat{\Gamma}$

$\Rightarrow \hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2$ (*)

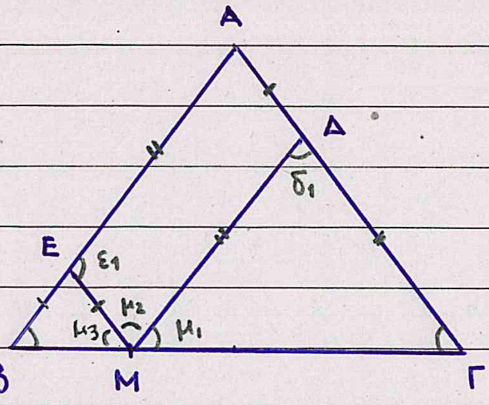
Θέλω να αποδείξω ότι Αx // Γy

$\left.\begin{array}{ll} \overset{\triangle}{B\Gamma Z}: & \hat{\gamma}_1 + \hat{B} + \hat{J}_1 = 180° \text{ (άθροισμα γ. τριγ.)} \\ \overset{\triangle}{A\Delta E}: & \hat{a}_1 + \hat{\Delta} + \hat{\varepsilon}_1 = 180° \text{ (άθροισμα γ. τριγ.)} \\ & \hat{a}_1 = \hat{\gamma}_1 \;,\; \hat{B} = \hat{\Delta} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\varepsilon}_1 = \hat{J}_1 \Longrightarrow \hat{\varepsilon}_2 = \hat{J}_2$ (παραπληρωματικές ίσων γωνιών) (**)

$\left.\begin{array}{ll} \text{Από } (*): & \hat{a}_2 = \hat{\gamma}_2 \\ (**): & \hat{\varepsilon}_2 = \hat{J}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ΑΖΓΕ παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες $\Rightarrow$ ΑΕ // ΖΓ $\Rightarrow$

Αx // Γy

11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή το Α. Από τυχαίο σημείο Μ της βάσης του φέρουμε τη ΜΕ παράλληλη προς την ΑΓ και την ΜΔ παράλληλη προς την ΑΒ (τα σημεία Ε και Δ ανήκουν στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα). Να αποδείξετε ότι:
(α) κάθε μια από τις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ισούται με το άθροισμα δύο διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται
(β) το άθροισμα των περιμέτρων των τριγώνων ΕΒΜ και ΔΜΓ ισούται με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.



$EM \parallel A\Gamma$
$M\Delta \parallel AB$

Αφού $\left.\begin{array}{l} EM \parallel A\Gamma \Rightarrow EM \parallel A\Delta \\ M\Delta \parallel AB \Rightarrow M\Delta \parallel AE \end{array}\right\}$ Απέναντι πλευρές παράλληλες $\Rightarrow$ ΕΜΔΑ είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού ΕΜΔΑ $\#$ $\Rightarrow$ $EM = A\Delta$ και $EA = M\Delta$

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές $\Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$ $(AB = A\Gamma)$

$\hat{A} = \hat{\delta}_1$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)

$\hat{A} + 2\hat{\Gamma} = 180$ (α.γ.τ. $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$) $\Rightarrow \hat{A} = 180 - 2\hat{\Gamma}$

$\hat{A} = \hat{\delta}_1 \Rightarrow \hat{\delta}_1 = 180 - 2\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\delta}_1 + 2\hat{\Gamma} = 180 \Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\mu}_1 \Rightarrow \overset{\triangle}{\Delta M\Gamma}$ ισοσκελές

$\Rightarrow \boxed{M\Delta = \Delta\Gamma}$

$\hat{\mu}_1 = \hat{B}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)

$\hat{\mu}_2 = \hat{A}$ (απέναντι γωνίες $\#$)

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

$\hat{\mu}_2 + \hat{\mu} + \hat{\Gamma} = 180° \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{\Gamma} = \hat{\mu}_3 \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\mu}_3 = \hat{B} \Rightarrow \overset{\triangle}{B\hat{E}M}$ ισοσκελές $\Rightarrow$ $\boxed{BE = EM}$

(α) $EM + M\Delta = AE + EB = AB$ $\qquad$ $\Delta A + AE = EB + AE = AB$

$M\Delta + A\Delta = \Delta\Gamma + A\Delta = A\Gamma$ $\qquad$ $AE + EM = AE + EB = AB$

(β) $\Pi_{(EBM)} + \Pi_{(\Delta M\Gamma)} = \underline{EB} + \underline{\underline{EM}} + BM + \underline{\Delta M} + M\Gamma + \underline{\underline{\Delta\Gamma}} =$

$= (EB + M\Delta) + (EM + \Delta\Gamma) + (BM + M\Gamma)$

$= (EB + EA) + (A\Delta + \Delta\Gamma) + B\Gamma = AB + A\Gamma + B\Gamma = \Pi_{(AB\Gamma)}$