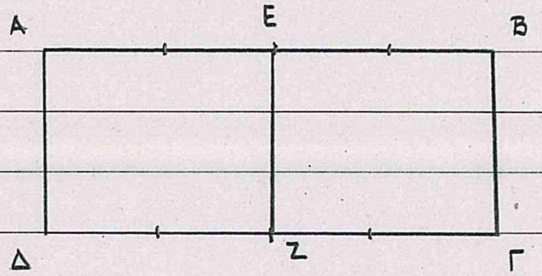
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9_ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΙΙ
(Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο)

Λυμένες Ασκήσεις 4-8 Δραστηριοτήτων σελ. 149-150

4. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, E είναι το μέσο της AB και Z το μέσο της $\Gamma\Delta$.
Να δείξετε ότι $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο.



Αφού $AB = \Gamma\Delta$ ($AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο) και E μέσο της AB και Z μέσο της $\Gamma\Delta$ $\Rightarrow$ $AE = EB = \Delta Z = Z\Gamma$

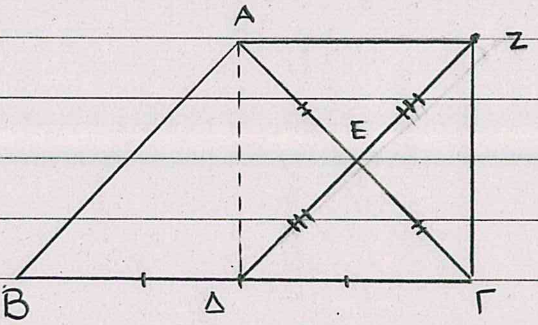
Αφού $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο $\Rightarrow$ $AB \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow AE \parallel Z\Delta$

$\left.\begin{array}{l} AE = \Delta Z \\ AE \parallel \Delta Z \end{array}\right\}$ Απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες $\Rightarrow AEZ\Delta$ #

$AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

$\left.\begin{array}{l} AEZ\Delta \ \# \\ \hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ \end{array}\right\}$ Παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία $\Rightarrow AEZ\Delta$ ορθογώνιο.

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$, το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$ και E το μέσο της $A\Gamma$. Προεκτείνουμε τη ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.



$$\left.\begin{array}{l} \text{Αφού } E \text{ μέσο της } A\Gamma \Rightarrow AE = E\Gamma \\ \Delta E = EZ \text{ (δεδομένο)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Οι διαγώνιοι } A\Gamma, AZ \text{ του } AZ\Gamma\Delta \text{ διχοτομούνται}$$

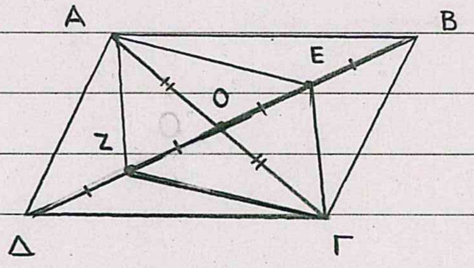
$\Rightarrow AZ\Gamma\Delta$ #

Αφού $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές $(AB = A\Gamma)$ και $A\Delta$ διάμεσος ($\Rightarrow A\Delta$ ύψος και διχοτόμος).

Αφού $A\Delta$ ύψος $\Rightarrow A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} AZ\Gamma\Delta \ \# \\ A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ \end{array}\right\} \text{Παραλληλόγραμμο και μία γωνία ορθή} \Rightarrow AZ\Gamma\Delta \text{ ορθογώνιο.}$$

6. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΒΔ = 2ΑΓ$. Αν οι διαγώνιοι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ τέμνονται στο $Ο$ και τα σημεία $Ε, Ζ$ είναι τα μέσα των $ΟΒ$ και $ΟΔ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ΑΕΓΖ$ είναι ορθογώνιο.



ΑΒΓΔ # ⟹ οι διαγώνιοι του διχοτομούνται ⟹ ΔΟ = ΟΒ κ ΑΟ = ΟΓ

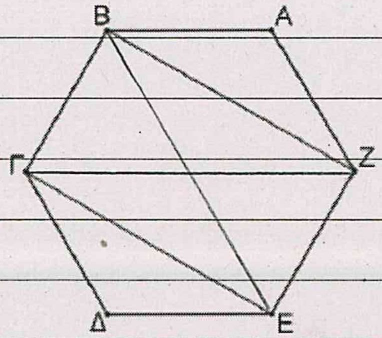
αφού Ε και Ζ μέσα των ΟΒ και ΟΔ ⟹ ΔΖ = ΖΟ = ΟΕ = ΕΒ (*)

$\left.\begin{array}{l} ΑΟ = ΟΓ \\ ΖΟ = ΟΕ \end{array}\right\}$ Οι διαγώνιοι του ΑΕΓΖ διχοτομούνται ⟹ ΑΕΓΖ #

$\left.\begin{array}{l} ΒΔ = 2.ΑΓ \Rightarrow ΑΓ = \frac{ΒΔ}{2} \\ \text{Αφού } ΔΖ = ΖΟ = ΟΕ = ΕΒ \Rightarrow ΖΕ = \frac{ΒΔ}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{ΑΓ = ΖΕ}}$

$\left.\begin{array}{l} ΑΕΓΖ \ \# \\ ΑΓ = ΖΕ \end{array}\right\}$ Παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους ⟹ ΑΕΓΖ ορθογώνιο.

7. Στο σχήμα το πολύγωνο *ΑΒΓΔΕΖ* έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες. Να δείξετε ότι το *ΒΖΕΓ* είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{BAZ}, \overset{\triangle}{Γ\Delta E}$:

AB = ΓΔ (ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο) (Π)
AZ ΔΕ (——— ‖ ———) (Π)
$\hat{A} = \hat{\Delta}$ (——— ‖ ———) (Γ)

(Π – Γ – Π) ⇓ $\overset{\triangle}{BAZ} = \overset{\triangle}{Γ\Delta E}$ ⇒

έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ⇒ ΒΖ = ΓΕ

(*) ΒΖ = ΓΕ
(**) ΒΓ = ΖΕ (ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο)

Απέναντι πλευρές ίσες ⇒ ΒΖΕΓ #

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{BZE}, \overset{\triangle}{ΓZE}$

ΒΖ = ΓΕ (*) (Π)
ΖΕ = κοινή πλευρά (Π)
$A\hat{Z}E - A\hat{Z}B = B\hat{Z}E$, $Z\hat{E}\Delta - Γ\hat{E}\Delta = Z\hat{E}Γ$
Όμως: $A\hat{Z}E = Z\hat{E}\Delta$ (γωνίες εξαγώνου)
$A\hat{Z}B = Γ\hat{E}\Delta$ (αφού $\overset{\triangle}{BAZ} = \overset{\triangle}{Γ\Delta E}$)

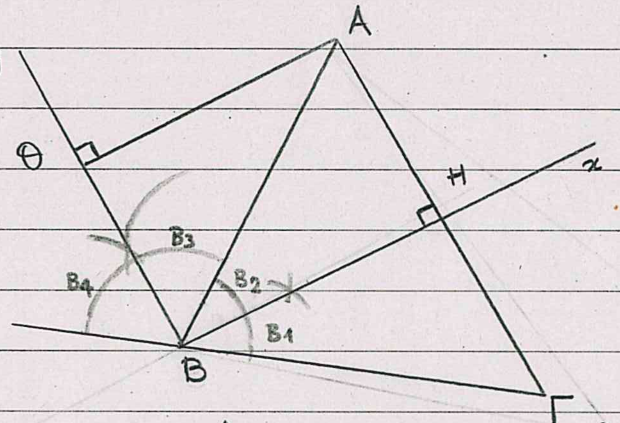
$B\hat{Z}E = Z\hat{E}Γ$ (Γ)

(Π – Γ – Π) ⇒ $\overset{\triangle}{BZE} = \overset{\triangle}{ΓZE}$ ⇒ έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα ⇒ ΒΕ = ΓΖ

ΒΖΕΓ #
ΒΕ = ΓΖ

Παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους ⇒ ΒΖΕΓ ορθογώνιο

8. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Φέρουμε την εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $Β$. Αν $ΑΗ$ κάθετη στην εσωτερική διχοτόμο και $ΑΘ$ κάθετη στην εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $Β$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΗΒΘ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Bx εσωτερική διχοτόμος της $\hat{B}$

By εξωτερική διχοτόμος της $\hat{B}$

(δηλαδή διχοτόμος της $\hat{B}_{εξ}$.)

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \text{ και } \hat{B}_3 = \hat{B}_4 \\ \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{B}_4 = 180^\circ \text{ (ευθεία γωνία)} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\hat{B}_2 + 2\hat{B}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{H}B = 90^\circ \ (AH \perp Bx) \\ A\hat{Θ}B = 90^\circ \ (AΘ \perp By) \\ Θ\hat{B}H = 90^\circ \ (Θ\hat{B}H = \hat{B}_2 + \hat{B}_3) \end{array}\right\}$$

ΑΗΒΘ είναι τετράπλευρο με 3 ορθές γωνίες $\Rightarrow$ ΑΗΒΘ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.