Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 9_ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΙΙ (Τετράγωνο)

Λυμένες Ασκήσεις 4-5 και 7-8
Δραστηριοτήτων σελ. 159-160

4. Δίνονται τα σημεία $A(0,4)$, $B(2,2)$, $\Gamma(0,0)$ και $\Delta(-2,2)$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

$(AB) = \sqrt{(2-0)^2+(2-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ μον.

$(B\Gamma) = \sqrt{(0-2)^2+(0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ μον.

$(\Gamma\Delta) = \sqrt{(-2-0)^2+(2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ μον.

$(\Delta A) = \sqrt{(-2-0)^2+(2-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ μον.

Επομένως $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A \Rightarrow$ τετράπλευρο με όλες τις πλευρές ίσες $\Rightarrow AB\Gamma\Delta$ ρόμβος.

$\lambda = \frac{\psi_2-\psi_1}{x_2-x_1}$

$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Delta} = \frac{2-4}{2-0} \cdot \frac{2-4}{-2-0} = \frac{-2}{2} \cdot \frac{-2}{-2} = -1 \cdot 1 = -1 \Rightarrow AB \perp A\Delta$

$\Downarrow$

$\hat{A} = 90^\circ$

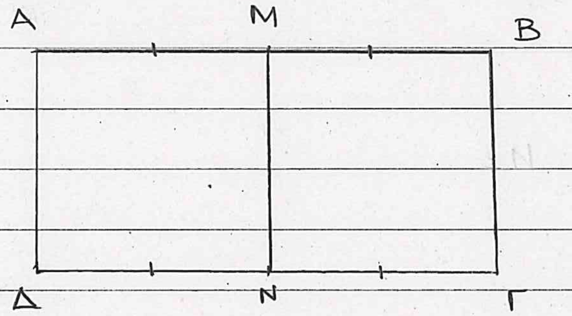
Ρόμβος και μία ορθή γωνία $\Rightarrow AB\Gamma\Delta$ τετράγωνο

ή

$$\left.\begin{aligned}(A\Gamma) &= \sqrt{(0-0)^2+(0-4)^2} = \sqrt{16} = 4\mu \\ (B\Delta) &= \sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2} = \sqrt{16} = 4\mu\end{aligned}\right\} \Rightarrow A\Gamma = B\Delta$$

Ρόμβος και οι διαγώνιοί του είναι ίσες $\Rightarrow AB\Gamma\Delta$ τετράγωνο.

5. Σε ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ ισχύει η σχέση $AB = 2BΓ$ και M, N τα μέσα των AB και $ΓΔ$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι τετράγωνο.



ΑΒΓΔ ορθογώνιο $\Rightarrow$ ΑΒ = ΓΔ
ΑΒ // ΓΔ
ΑΜ = ΜΒ και ΔΝ = ΝΓ

$\Rightarrow$ ΜΒ = ΝΓ, ΜΒ // ΝΓ $\Rightarrow$ απέναντι πλευρ ίσες και παράλληλε

$\Downarrow$

ΜΒΓΝ ▱

$MB = \frac{AB}{2}$ (αφού ΑΜ = ΜΒ)

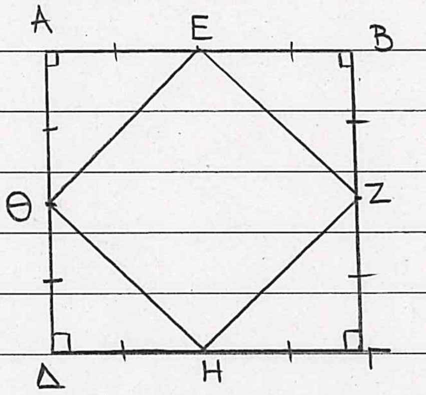
$AB = 2BΓ \Rightarrow BΓ = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow$ ΜΒ = ΒΓ, άρα το ▱ ΜΒΓΝ έχε 2 διαδοχικές πλευρές ίσες $\Rightarrow$ ΜΒΓΝ ρόμβος

$\hat{B} = 90°$ (διότι ΑΒΓΔ ορθογώνιο)
ΜΒΓΝ ρόμβος

Ρόμβος με μία γωνία του ορθή $\Rightarrow$ ΜΒΓΝ τετράγωνο.

7. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών τετραγώνου είναι κορυφές ενός άλλου τετραγώνου.



ΑΒΓΔ τετράγωνο $\Rightarrow$ $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$

ΑΒΓΔ τετράγωνο και Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, $\Rightarrow$ $AE = EB = BZ = Z\Gamma = \Gamma H = H\Delta = \Delta\Theta = \Theta A$ (*)

Συγκρίνουμε τα τέσσερα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Theta A E}$, $\overset{\triangle}{ZBE}$, $\overset{\triangle}{H\Gamma Z}$, $\overset{\triangle}{\Theta\Delta H}$:

1) 2) $AE = EB = BZ = Z\Gamma = \Gamma H = H\Delta = \Delta\Theta = \Theta A$ (Σχέση (*)) (Π) (Π)

3) $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ (αφού ΑΒΓΔ τετράγωνο) (Ο)

(Π-Π-Ο) $\Rightarrow$ $\overset{\triangle}{\Theta A E} = \overset{\triangle}{ZBE} = \overset{\triangle}{H\Gamma Z} = \overset{\triangle}{\Theta\Delta H}$

$\Rightarrow$ έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα $\Rightarrow$ $EZ = ZH = H\Theta = \Theta E$

Αφού $\overset{\triangle}{\Theta A E}$ ορθογώνιο και ισοσκελές $\Rightarrow$ $A\hat{\Theta}E = \Theta\hat{E}A = 45^\circ$

Ομοίως για το $\overset{\triangle}{EBZ}$ $\Rightarrow$ $B\hat{Z}E = Z\hat{E}B = 45^\circ$

Άρα $Z\hat{E}B + \Theta\hat{E}A = 90^\circ$

Όμως $\Theta\hat{E}A + Z\hat{E}B + \Theta\hat{E}Z = 180^\circ$ (ευθεία γωνία)

$\Rightarrow$ $\Theta\hat{E}Z = 90^\circ$

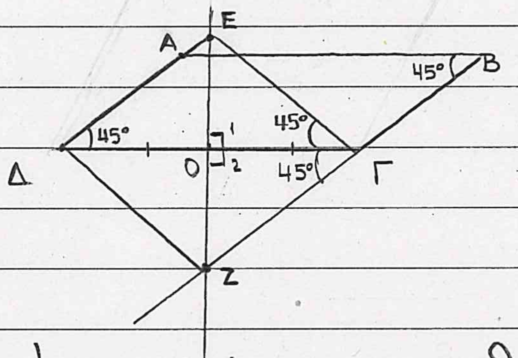
Τελικά:

$EZ = ZH = H\Theta = \Theta E$ $\Rightarrow$ ΕΖΗΘ ρόμβος

$\Theta\hat{E}Z = 90^\circ$

Ρόμβος και μία γωνία του ορθή $\Rightarrow$ ΕΖΗΘ τετράγωνο.

8. Στο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ η $\hat{B} = 45^\circ$. Να φέρετε τη μεσοκάθετη της $ΓΔ$ η οποία τέμνει τις $ΑΔ$ και $ΒΓ$ ή τις προεκτάσεις τους, στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $ΔΕΓΖ$ είναι τετράγωνο.



ΑΒΓΔ #

$\hat{B} = 45^\circ \Rightarrow Ε\hat{Δ}Γ = 45^\circ$ (απέναντι γωνίες # είναι ίσες).

ΑΒ // ΓΔ (αφού ΑΒΓΔ #) $\Rightarrow Δ\hat{Γ}Ζ = 45^\circ$ (εντός εκτός και επί τα αυτά είναι ίσες).

Αφού Ε σημείο της μεσοκαθέτου του ΓΔ, ισαπέχει από τα άκρα του $\Rightarrow$

$ΔΕ = ΕΓ \Rightarrow \overset{\triangle}{ΔΕΓ}$ ισοσκελές τρίγωνο $\Rightarrow Ε\hat{Γ}Δ = 45^\circ$

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΕΟΓ}$, $\overset{\triangle}{ΖΟΓ}$

1) ΟΓ κοινή πλευρά (Π)
2) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ$ (αφού ΕΟ ⊥ ΓΔ) (Ο)
3) $Ε\hat{Γ}Ο = Ζ\hat{Γ}Ο = 45^\circ$ (Γ)

$\Rightarrow$ (Π-Γ-Ο) $\Rightarrow \overset{\triangle}{ΕΟΓ} = \overset{\triangle}{ΖΟΓ} \Rightarrow$ έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα $\Rightarrow$ ΕΓ = ΓΖ

Αφού $\overset{\triangle}{ΔΕΓ}$ ισοσκελές $\Rightarrow$ ΔΕ = ΕΓ, ΕΓ = ΓΖ $\Rightarrow$ ΔΕ = ΓΖ

ΑΒΓΔ # ΑΔ // ΒΓ $\Rightarrow$ ΔΕ // ΓΖ

$\Rightarrow$ Απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες $\Rightarrow$ ΔΕΓΖ #

ΔΓ ⊥ ΕΖ, οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα, ΔΕΓΖ # $\Rightarrow$ ΔΕΓΖ ρόμβος

ΔΕΓΖ ρόμβος που έχει μία ορθή γωνία ($Ε\hat{Γ}Ζ = 90^\circ$) $\Rightarrow$ ΔΕΓΖ τετράγωνο.