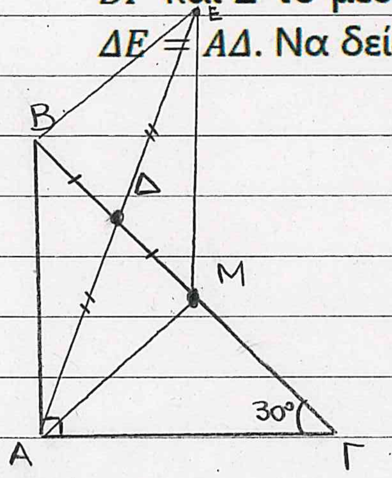
<u>Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ</u>

ΕΝΟΤΗΤΑ 9_ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΙΙ

(Ειδικά Θεωρήματα στα Τρίγωνα)

Λυμένες Ασκήσεις 9-12 Δραστηριοτήτων σελ. 169

9. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma$ $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$ και Δ το μέσο της MB. Να προεκτείνετε την $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Να δείξετε ότι $AMEB$ είναι ρόμβος.



M μέσο ΒΓ ⇒ $BM = M\Gamma$

Δ μέσο ΒΜ ⇒ $B\Delta = \Delta M$ (*)

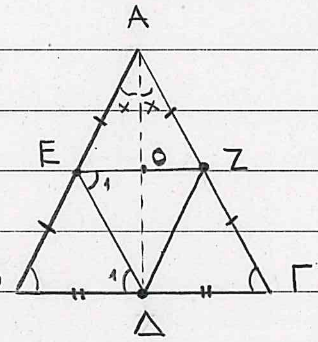
Θεώρημα των 30° ⇒ $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ ⇒ $AB = BM$

Αφού $A\Delta = \Delta E$ (δεδομένο), $B\Delta = \Delta M$ (*) } Οι διαγώνιοι του ΑΜΕΒ διχοτομούνται ⇒ ΑΜΕΒ #.

Αφού ΑΜ διάμεσος του ορθογωνίου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(\hat{A}=90^\circ)$ ⇒ $AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM = M$

Άρα $AB = BM$ και $BM = AM$ ⇒ $AB = AM$ ⇒ Δύο διαδοχικές πλευρές # είναι ίσες ⇒ ΑΜΕΒ ρόμβος.

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$. Το σημείο E είναι το μέσο της AB, το Z το μέσο της $A\Gamma$ και το Δ το μέσο της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το $AE\Delta Z$ είναι ρόμβος.



$$\left.\begin{array}{l} AB = A\Gamma \\ E \text{ μέσο } AB \\ Z \text{ μέσο } A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{AE = AZ}} \quad (***$$

$$\text{Αφού} \left.\begin{array}{l} E \text{ μέσο του } AB \\ Z \text{ μέσο του } A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow EZ \mathbin{/\!/\!=} \frac{B\Gamma}{2}$$

Φέρω την $A\Delta$ η οποία είναι η διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $\Rightarrow$ είναι και ύψος και διχοτόμος $\Rightarrow A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma = 90°$

$$\text{Αφού} \left.\begin{array}{l} EZ \parallel B\Gamma \\ A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{\Theta}Z = A\hat{\Theta}E = 90°$$ δηλαδή οι διαγώνιοι του $AE\Delta Z$ τέμνονται κάθετα.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{EB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{E\Delta Z}$

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)} & (\Gamma) \\ E\Delta \text{ (κοινή πλευρά)} & (\Pi) \\ EZ = \frac{B\Gamma}{2} = B\Delta & (\Pi) \end{array}\right\} (\Pi\text{-}\Gamma\text{-}\Pi) \Rightarrow \overset{\triangle}{EB\Delta} = \overset{\triangle}{E\Delta Z} \Rightarrow$$

έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα $\Rightarrow \Delta Z = EB$ $(*)$

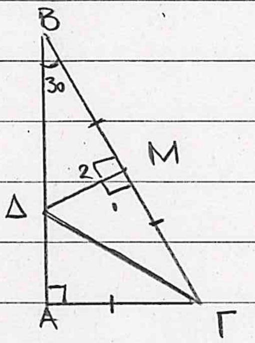
Ομοίως συγκρίνοντας $\overset{\triangle}{Z\Gamma\Delta}$ και $\overset{\triangle}{E\Delta Z}$ θα πάρουμε $E\Delta = \Gamma Z$ $(**)$

$$\text{Επομένως} \left.\begin{array}{l} (*): \Delta Z = EB = EA \\ (**): E\Delta = \Gamma Z = ZA \\ (***): AE = AZ \end{array}\right\}$$ $AE = AZ = \Delta Z = E\Delta$ δηλαδή το $AE\Delta Z$ έχει όλες του τις πλευρές ίσες $\Rightarrow$ $\underline{\underline{AE\Delta Z \text{ ρόμβος}}}$

11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90°$ και $\hat{B} = 30°$. Από το μέσο M της υποτείνουσας $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία κάθετη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ. Να δείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές

(β) τα τρίγωνα ΔBM και $M\Delta\Gamma$ είναι ίσα



α) M μέσο του ΒΓ, $\Delta M \perp B\Gamma$ } Άρα ΔΜ διάμεσος και ύψος του τριγώνου $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma \Rightarrow$ Το τρίγωνο $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ ισοσκελές.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Delta BM}$ και $\overset{\triangle}{M\Gamma\Delta}$:

1) ΔΜ κοινή πλευρά (Π)

2) ΒΜ = ΜΓ (Μ μέσο του ΒΓ) (Π)

3) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90°$ ($\Delta M \perp B\Gamma$) (Ο)

} (Π – Π – Ο) $\Downarrow$ $\overset{\triangle}{\Delta BM} = \overset{\triangle}{M\Gamma\Delta}$

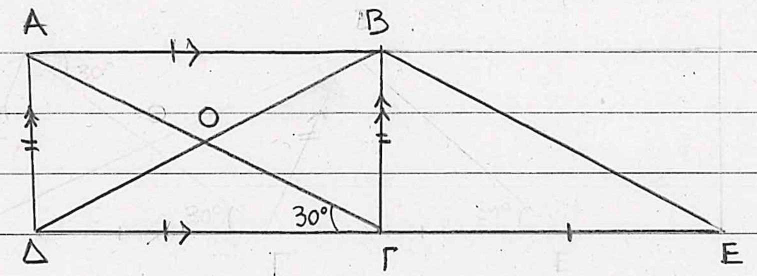
12. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Στην προέκταση της $ΔΓ$ παίρνουμε σημείο $Ε$ τέτοιο ώστε $ΓΕ = ΔΓ$. Αν η γωνιά $ΑΓΔ = 30°$, να αποδείξετε ότι:

(α) το $ΑΒΕΓ$ είναι παραλληλόγραμμο

(β) το $ΔΒΕ$ είναι ισοσκελές τρίγωνο

(γ) $ΑΔ = ΔΟ$ (όπου $Ο$ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του $ΑΒΓΔ$)

α)



ΑΒΓΔ ορθογώνιο $\Rightarrow$ ΑΒ $//=$ ΓΔ

ΓΕ = ΔΓ (δεδ.) $\Big\} \Rightarrow$ ΑΒ = ΓΕ

ΑΒ // ΓΔ $\Rightarrow$ ΑΒ // ΓΕ $\Big] \Rightarrow$ Απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες $\Downarrow$ ΑΒΕΓ $\#$.

β) ΒΓ διάμεσος του τριγώνου $\overset{\triangle}{ΔΒΕ}$

$Β\hat{Γ}Δ = 90°$ (αφού ΑΒΓΔ ορθογώνιο) $\Rightarrow$ ΒΓ $\perp$ ΔΕ $\Rightarrow$ ΒΓ ύψος του τριγώνου $\overset{\triangle}{ΔΒΕ}$

Άρα ΒΓ και διάμεσος και ύψος του $\overset{\triangle}{ΔΒΕ} \Rightarrow$ $\overset{\triangle}{ΔΒΕ}$ ισοσκελές τρίγωνο.

γ) $\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$ ορθογώνιο τρίγωνο αφού $\hat{Δ} = 90°$ (ΑΒΓΔ ορθογώνιο)

$Α\hat{Γ}Δ = 30° \Rightarrow ΑΔ = \dfrac{ΑΓ}{2}$

ΑΟ = ΟΓ (αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται) $\Big\}$ ΑΔ = ΑΟ = ΟΓ (*)

Όμως οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες $\Rightarrow$

ΑΟ = ΟΓ = ΔΟ = ΟΒ $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ ΑΔ = ΔΟ